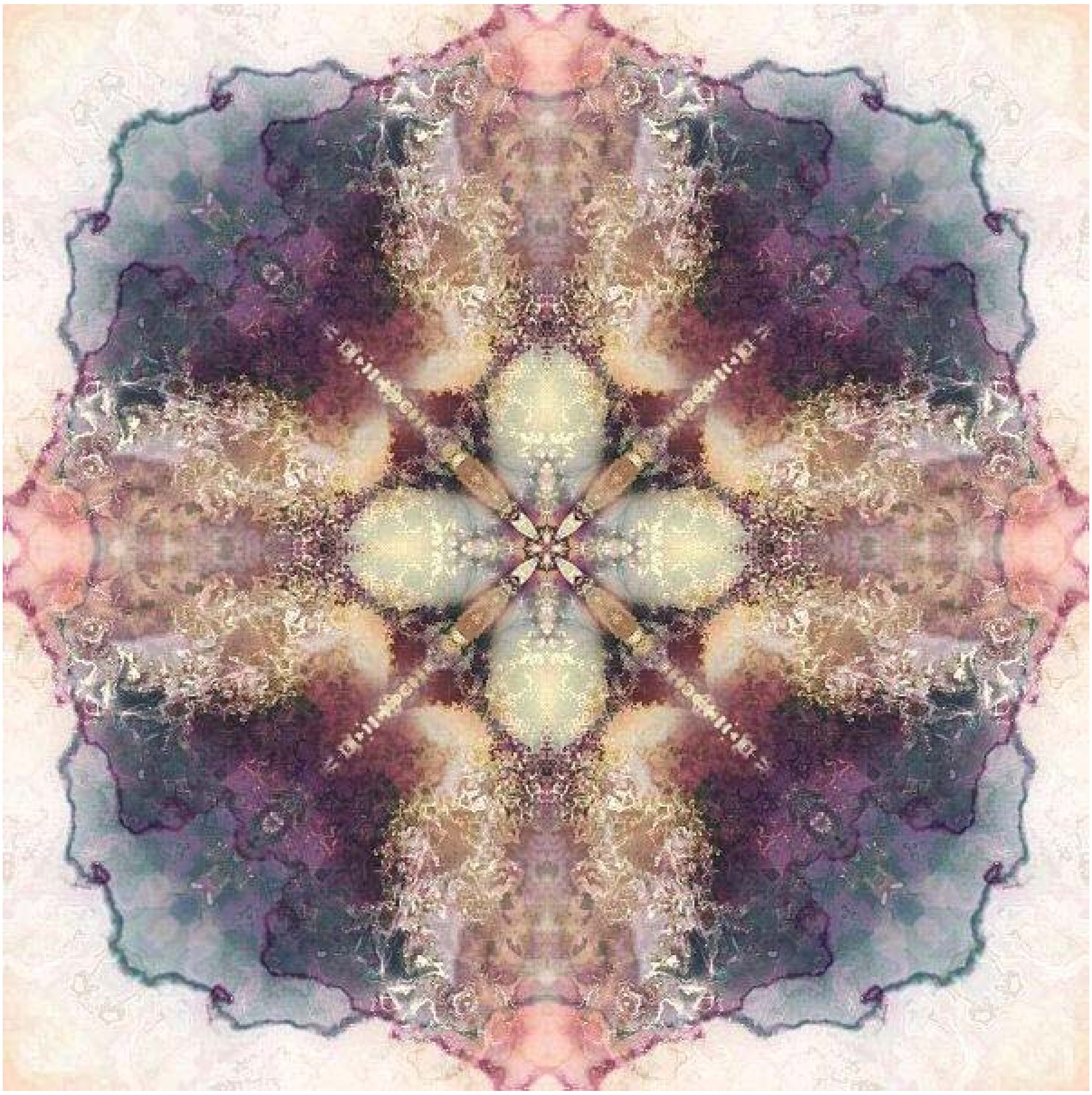

Introducción a los Fractales

¿QUÉ ES UN FRACTAL?

Un fractal es un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala. En otras palabras, si enfocamos una porción cualquiera de un objeto fractal (imaginemos que utilizamos un magnificador, o hasta un microscopio, para ello), notaremos que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal.

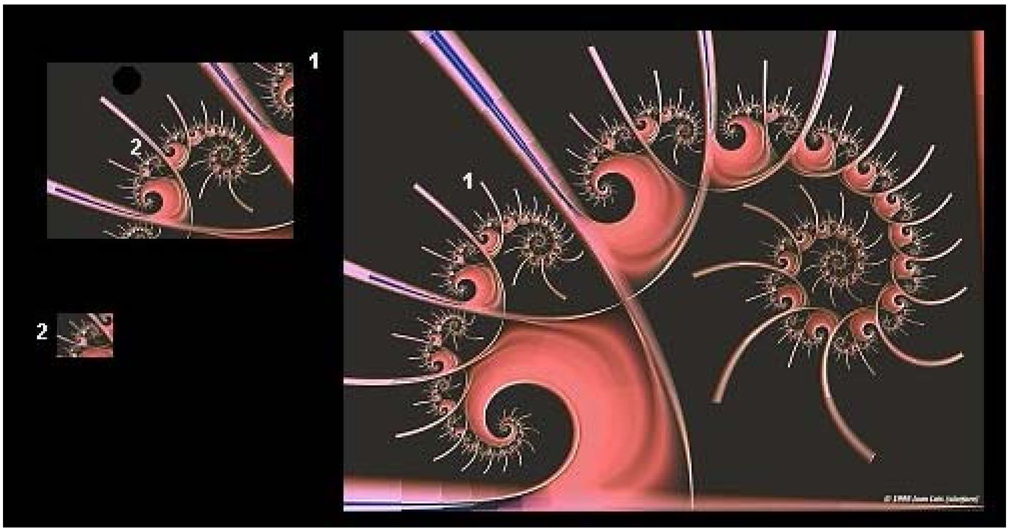

Figura 1: fractal de Julia.

Otro aspecto importante sobre los fractales es que su dimensión es fraccionaria. Es decir, en vez de ser unidimensional, bidimensional o tridimensional (como es el para los objetos que nos son más familiares), la dimensión en la mayoría de los fractales no se ajusta a dichos conceptos tradicionales. Más aún, su valor raramente puede ser expresado con un número entero. Esto es, precisamente, lo que les ha dado su nombre.

Muchas veces, los fractales se subscriben a la definición anterior. Otras no: en vez de observarse la misma estructura en proporciones menores de la figura principal que estemos observando, serán evidentes rasgos y patrones nuevos. Ello dependerá del tipo de fractal que examinemos y, como debe ser evidente, de la función matemática que hayamos utilizado para producirlo.

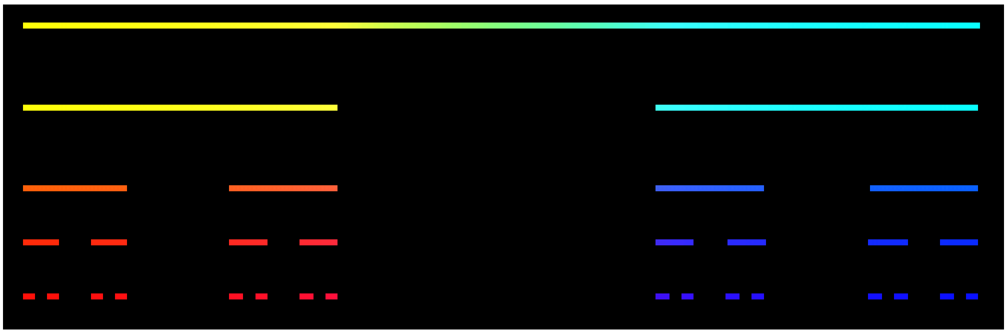

Figura 2: polvo de Cantor.

Probablemente, el primer objeto fractal puro en la historia, el polvo de Cantor, fue descrito por el matemático alemán Georg Cantor—inventor de la teoría de los conjuntos—alrededor de 1872. A pesar de ser una figura extremadamente sencilla, recoge todos los atributos discutidos sobre los fractales hasta el momento: presenta autosimilitud a cualquier escala y su dimensión es fraccionaria, con valor aproximado de 0,6309297535714574370995271114 (*log 2/log 3,*si utilizamos una expresión más adecuada). Igualmente, podemos basarnos en él para introducir otra característica general de este tipo de objeto: son producidos por procesos de iteración.

La iteración puede describirse como un mecanismo de retroalimentación, que se repite un número *n* de veces. Esto se refiere, por ejemplo, al acto de utilizar un valor inicial en el cálculo de cierta función, y luego tomar el producto, o resultado, como valor inicial para el próximo cálculo de esa misma función. Dicha operación puede repetirse indefinidamente (incluso infinitamente), produciendo una iteración. Cualquier proceso semejante tendrá como resultado un fractal.

El polvo de Cantor se inicia con un segmento lineal (justamente, conocido como el iniciador); éste se divide en tres segmentos menores de la misma longitud, el central de los cuales se extrae. Este proceso (denominado, usualmente, como el generador) se repite indefinidamente, al final de lo cual—si tiene final— se habrá producido el polvo de Cantor.

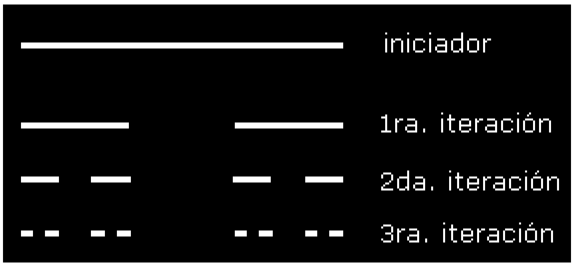

Figura 3: iteración del polvo de Cantor.

De la misma manera, podemos producir un triángulo de Sierpinski, una figura inventada por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1915:

Introducción a los fractales. Este documento esta basado en el artículo en inglés *The nature of fractals* deJuan Luis Martinez, de Third Apex to Fractovia (fractovia.org). El artículo en versión inglesa se puede descargar en formato pdf, en la siguiente dirección: http://www.fractovia.org/es/what_es1.shtml

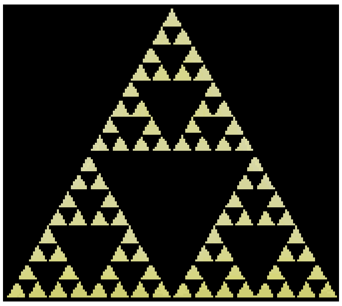

Figura 4: triángulo de Sierpinski.

Para éste, se comienza con un triángulo equilátero. En su interior, se traza otro triángulo equilátero, cuyas puntas, o esquinas, deben coincidir con los puntos medios de cada lado del triángulo mayor. Esta nueva figura tendrá una orientación invertida con respecto a la primera. Seguido, se retira, o se elimina, de la figura ese nuevo triángulo invertido, tal que solamente se conserven los tres triángulos equiláteros menores—y similares—que se observan dentro del grande. Luego, realizamos el mismo procedimiento (de iteración) para cada triángulo pequeño, obteniéndose, como resultado, un triángulo de Sierpinski.

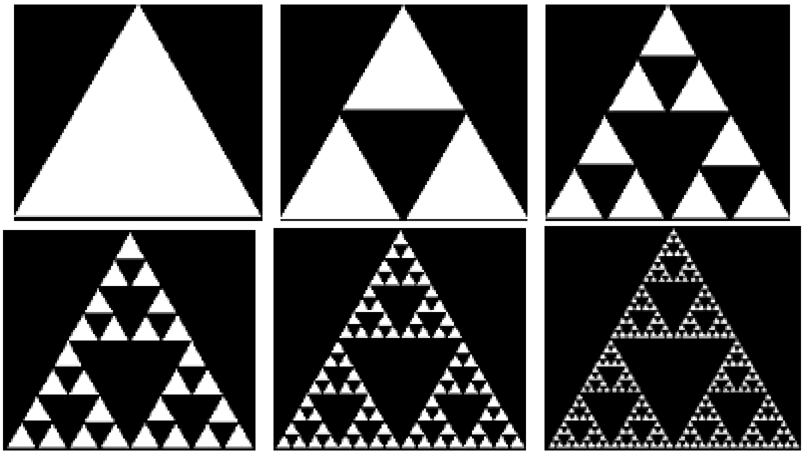

Figura 5: Iteración de un triángulo de Sierpinski.

Hay que tener en cuenta que cuando decimos que se elimina ese nuevo triángulo no solamente significa que quitaremos ese triángulo del medio y nos olvidamos de él, sino que los puntos contenidos en esa área, específicamente, no pertenecen al conjunto de puntos comprendidos en el triángulo de Sierpinski; o dicho de otro modo, esa sección no pertenece al conjunto.

Aunque la existencia de los fractales se conoce desde fines del siglo XIX (cuando eran considerados, simplemente, como curiosidades matemáticas), su verdadera identidad no fue plenamente expresada hasta las décadas de 1960 y 1970, gracias a los importantes estudios de Benoît Mandelbrot y otros científicos.

CONSIDERACIONES ADICIONALES SOBRE DIMENSIÓN FRACTAL

En geometría, un punto no tiene dimensión alguna porque no tiene longitud, anchura o profundidad.

Figura 6: un punto.

Una línea es unidimensional (tiene una sola dimensión) porque sólo tiene longitud.

Figura 7: una línea.

Un plano es bidimensional porque tiene longitud y anchura (largo y ancho).

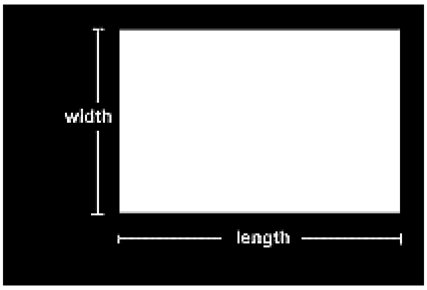

Figura 8: un plano.

Una caja, o un cubo, es tridimensional porque tiene longitud, anchura y profundidad (largo, ancho y alto, por ejemplo).

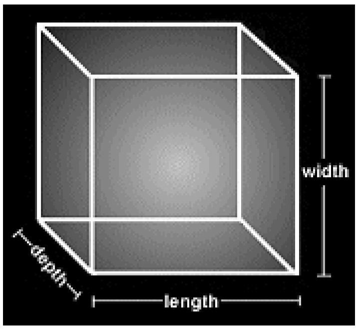

Figura 9: un cubo.

Hasta aquí, nos hemos referido al concepto que ordinariamente asociamos a la dimensión (también llamada euclidiana o dimensión topológica). Los fractales, por su parte, tienen dimensiones fraccionarias, cuyos valores, generalmente, sólo se expresan con números no-enteros, tales como 1,7; 0,5326478 ó 3,28. ¿Cómo es eso posible?

Si dividimos por la mitad la medida de la longitud de un objeto unidimensional, obtenemos dos objetos pequeños de idéntica apariencia al objeto original.

Figura 10: división de una línea.

Si dividimos por la mitad la medida de la longitud y la anchura de un objeto bidimensional, obtenemos cuatro copias más pequeñas de dicho objeto.

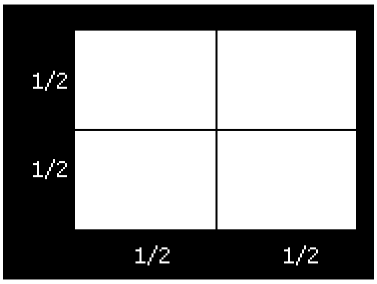

Figura 11: división de un plano.

Si dividimos por la mitad la medida de la longitud, la anchura y la profundidad de un objeto tridimensional, obtenemos ocho copias a escala del objeto original.

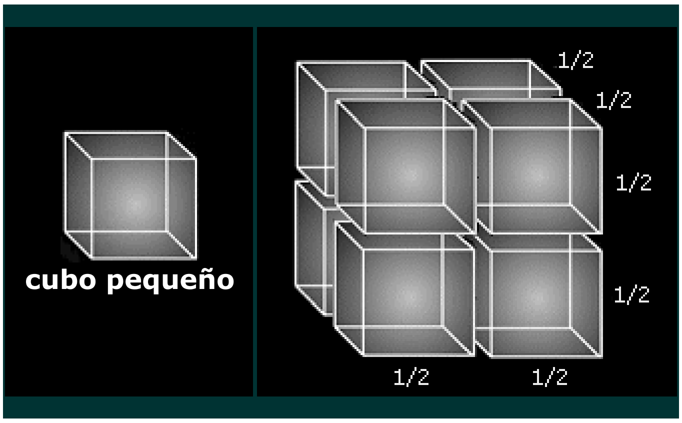

Figura 12: división de un cubo.

Observando con detenimiento, nos percatamos de que tenemos lo que podríamos llamar, para nuestro propósito, duplicación geométrica (o crecimiento exponencial), pues la duplicación ocurre a "razón" exponencial de 2, 4, 8 y así sucesivamente. Aritméticamente, estos números pueden expresarse como:

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

Si examinamos el valor del exponente en cada caso, encontramos que éste es idéntico al valor de la dimensión de cada objeto: 1, 2 y 3.

Ahora, hagamos lo mismo con un objeto fractal. Tomemos como ejemplo el triángulo de Sierpinski. Si dividimos por la mitad la medida de su altura y base, solamente obtenemos tres copias a escala de dicha figura (recordemos que la sección central—el triángulo invertido—no pertenece al triángulo). Entonces, necesitamos un exponente tal que $2^z = 3$.

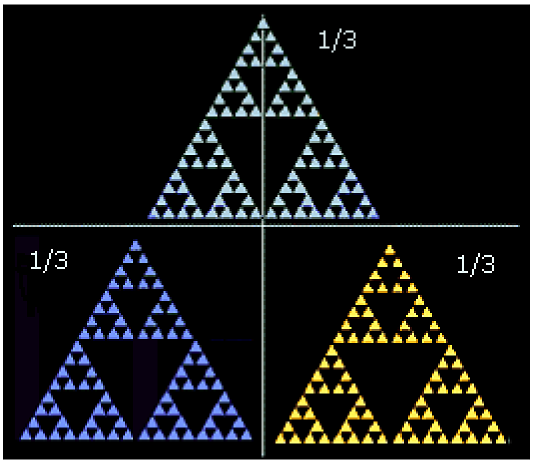

Figura 13: división de un triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Sierpinski no es unidimensional porque 3 es mayor que 2, pero tampoco es bidimensional porque 3 es menor que 4. Así pues, su dimensión debe estar entre esas dos dimensiones (1 y 2). En realidad, es cerca de 1.58496250072115618145373894395.

OTRO TIPO DE GEOMETRÍA

En concepto de dimensión fractal, o fraccionaria, es algo que nunca existiría y nunca sería comprendida si nos limitásemos al mundo de la geometría elemental. Por el contrario, éste pertenece a otro campo geométrico en el cual, al menos, uno de los postulados de Euclides—aquellos compilados por dicho matemático griego en el siglo cuarto a.C.—no se sostiene, permitiendo que emerjan otras realidades matemáticas. Podemos decir, pues, que hay dos tipos principales de geometría: euclidiana y no-euclidiana. En el primer grupo se encuentran la geometría plana, la geometría sólida, la trigonometría, la geometría descriptiva, la geometría de proyección, la geometría analítica y la geometría diferencial; en el segundo, la geometría hiperbólica, la geometría elíptica y la geometría fractal.

¿POR QUÉ LOS FRACTALES SE LLAMAN "FRACTALES"?

La palabra "fractal" proviene del latín "fractus", que significa "fragmentado", "fracturado", o simplemente "roto o quebrado", muy apropiado para objetos cuya dimensión es fraccionaria. El término fue acuñado por Benoît Mandelbrot en 1975. Al estudio de los objetos fractales se le conoce, generalmente, como geometría fractal.

FigurA 14: un fractal cerca del borde del conjunto de Mandelbrot.

¿QUÉ HACE QUE LAS IMÁGENES DE LOS FRACTALES SEAN TAN COLORIDAS Y EXTRAÑAS?

Las imágenes de los fractales obtienen sus formas y colores cuando le asignamos un rango determinado de colores a una serie de puntos, dependiendo de su comportamiento matemático mientras se resuelve la función, con la ayuda indispensable de un ordenador (la computadora). En efecto, esa es la única manera de captarlos visualmente. Existen varias posibilidades al momento de asignar los valores que determinarán los colores:

- si el resultado se aproxima a cero (en cuyo caso, pertenece al conjunto),
- si escapa al infinito (y por tal, no pertenece al conjunto),
- si oscila entre varios estados,
- si no exhibe ningún patrón discernible.

En primer caso ocurre dentro de los límites que comprenden la figura fractal; el segundo, fuera de sus límites; y los tercero y cuarto ocurren en la frontera.

Si no fuera por esa asignación artificial de colores, los fractales lucirían como cualquier otra gráfica poco atractiva.

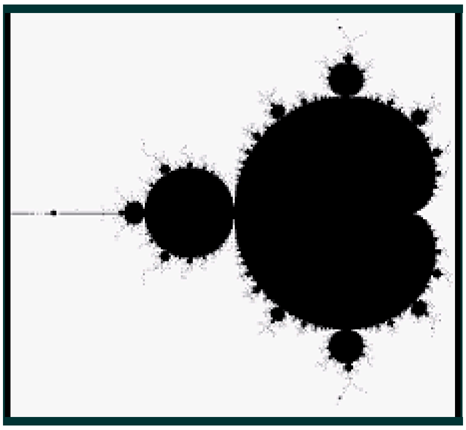

Figura 15: representación sencilla del conjunto de Mandelbrot.

MÁS ALLÁ DE LA MATEMÁTICA

Los fractales son entidades matemáticas, pero mucho más también. Los primeros ejemplos de este tipo de objeto fueron figuras matemáticas como el polvo de Cantor, la curva de Koch (1904) y el triángulo de Sierpinski. Luego de éstos, que datan de finales de siglo XIX y principios del XX, vinieron los trabajos de Gaston Julia y Pierre Fatou sobre los fractales del conjuto de Julia (1918-19) y, varias décadas más tarde, los estudios de Benoît Mandelbrot y otros matemáticos sobre el conjunto de Mandelbrot, atractores extraños y bifurcaciones, entre otros. No obstante, los fractales están por todas partes. Hay muchos objetos "ordinarios" que, debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales—aunque no los reconozcamos como tales de primera instancia. Las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos son fractales naturales; se diferencian de sus contrapartes matemáticos por ser entidades finitas en vez de infinitas. Ejemplos adicionales de fractales son el mercado de valores y el crecimiento poblacional.

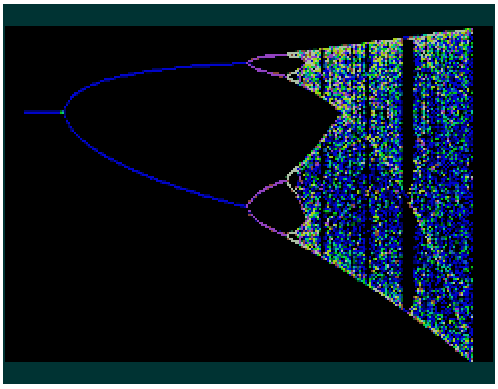

Figura 16: Bifurcación.

Los fractales también han cruzado la frontera entre la ciencia y el arte. Hoy en día, muchos artistas que han escogido este medio para sus expresiones producen magníficas representaciones hábilmente elaboradas de estos objetos matemáticas. Los valores (numéricos) que se asignan a los parámetros que definen un fractal también pueden convertirse a notas musicales para generar composiciones intrigantes y refrescantes. Esto último se denomina, generalmente, música fractal.

Recientemente, expertos han postulado que los fractales han estado asociados al arte mucho antes de que se estableciera su evidencia matemática. Por siglos, el ser humano ha utilizado patrones geométricos repetitivos, o recursivos, como elementos decorativos en vasijas, arquitectura, la ilustración de libros y muchas otras manifestaciones artísticas que, de algunas manera, pueden relacionarse con estructuras fractales.

Figuras 17, 18, 19
Ilustración de un libro "iluminado" al estilo Hiberno-Sajón: detalle del Libro de Kell (izquierda);
estructura fractal natural: caparazón de un nautilo (centro);
domo gótico de la catedral de Ely, UK (derecha).

Otros estudios han demostrado que muchos estilos musicales siguen la relación 1/f asociada a frecuencias en la naturaleza, como la encontrada en la interferencia de ruido y el flujo de un río (Voss y Clark, 1975).

EL OBJETO MATEMÁTICO MÁS COMPLEJO

El conjunto de Mandelbrot fue descubierto por Benoît Mandelbrot en la década de 1970, y nombrado en su honor por Adrien Douady y J. Hubbard en 1982. Su peculiar figura ha sido reproducida en innumerables ocasiones desde que se logró su primera representación visual en 1980.

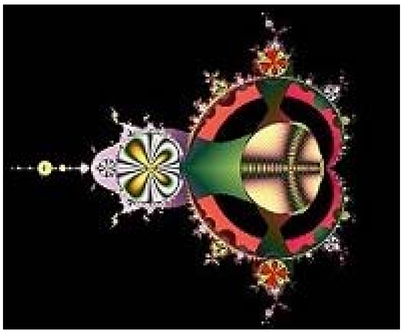

Figura 19: un colorido conjunto de Mandelbrot.

La función matemática que define al conjunto de Mandelbrot puede expresarse como el conjunto de todos los valores posibles de c (c siendo un número complejo) tal que la iteración de $z = z^2 + c$ (comenzando con $z = 0$) no va al infinito. La ecuación en sí misma es bien sencilla; la gráfica resultante, infinitamente compleja. Un ordenador (una computadora) es la herramienta más práctica que tenemos para trabajar con este y otros tipos de fractales debido a su capacidad para realizar cómputos con sorprendente rapidez. Si lo intentáramos a mano, no podríamos acabarlo en el curso de toda nuestra vida.

Los conjuntos de Mandelbrot y Julia están estrechamente relacionados. El conjunto de Mandelbrot itera $z = z^2 + c$ comenzando con $z = 0$ y variando el valor de c. El de Julia, por su parte, itera esa misma función, pero con valores fijos para c y variando los de z. Cada punto c en el conjunto de Mandelbrot especifica la estructura geométrica del conjunto de Julia correspondiente. Si c está en el conjunto de Mandelbrot, entonces el de Julia será conectado (cerrado). De lo contrario, el conjunto de Julia será sólo una colección de puntos desconectados, trazados sobre una gráfica.

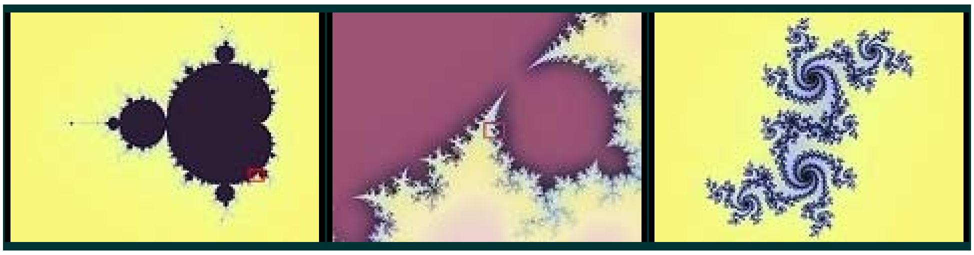

Figura 20: transformación Mandelbrot-Julia.

NÚMEROS COMPLEJOS

La existencia de los conjuntos de Mandelbrot y Julia depende de los números complejos. Pero si hablamos de los últimos, tenemos que, necesariamente, introducir los números imaginarios primero. Dos matemáticos italianos, Girolamo Cardano y Raffaele Bombelli, propusieron ambos tipos de números en el siglo XVI.

Como sabemos, los números negativos no tienen raíces cuadradas que puedan expresarse en números reales. No obstante, los matemáticos le han dado un valor imaginario *i* definido como la raíz cuadrada de -1 (de ahí su nombre).

$i = \sqrt{-1}$ ó **i^2 = -1**

Los números complejos, por su parte, son aquellos que se componen de una parte real y otra imaginaria. La parte real es un número real—por ejemplo, -2, 1, 1/2, 0.2154—, mientras que la parte imaginaria la componen un número real más el número especial "i", como en 3i. Un ejemplo de un número complejo es 2 + 3i.

Pero no todos los fractales se producen mediante la iteración de expresiones matemáticas con números complejos. La iteración de figuras geométricas elementales pueden igualmente producirlos. La alfombra de Sierpinski se produce partiendo de un cuadrado.

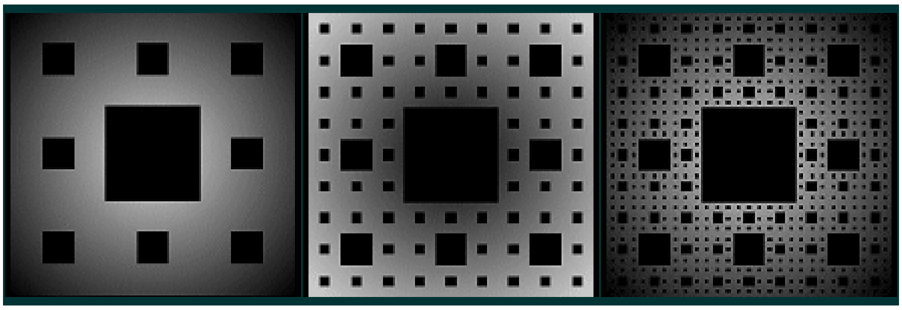

Figura 21: desde la izquierda: segunda, tercera y cuarta iteración de un cuadrado, o alfombra, de Sierpinski.

ECUACIONES, FUNCIONES O FÓRMULAS?

Una ecuación se define como un enunciado que demuestra que dos expresiones matemáticas son equivalentes, tal como x + 1 = 3 - x^2.

Una función puede definirse como una asociación entre dos o más variables, en la cual, para cada valor de las variables independientes, o argumentos, corresponde exactamente un valor de la variable dependiente en un conjunto espcífico (conocido como el dominio de la función). Por ejemplo: en una función como f(y) = x + 1, el valor de la variable *y* depende y varía según el valor de *x*. En dicha expresión, *y* es la variable dependiente, mientras que *x* es la variable independiente.

Una fórmula, por otra parte (y en nuestro caso), expresa un hecho o una realidad matemática. Como ejemplo, la fórmula para calcular el área de un triángulo es a = $^{bh}/_{2}$, donde *b* es la medida de la base, *h* es la medida de la altura, y *a* el área calculada para el triángulo.

Cuando nos referimos al conjunto de Mandelbrot, f(z) = z^2 + c, sería más apropiado hablar de función. Mientras que esta expresión es una ecuación, pues estamos estableciendo que un lado es equivalente al otro, es una función puesto que estamos limitando los posibles valoreas a un dominio determinado.

LOS FRACTALES Y EL CAOS

Por varias razones, los fractales han sido asociados a la teoría del caos. Mientras que algunas de estas figuras sí están estrechamente relacionadas, hay otros tipos de fractales que en nada tienen que ver con el caos. Como hemos visto, los primeros ejemplos de construcciones fractales (matemáticas) datan de finales del siglo XIX, mucho antes de que la teoría del caos fuese propuesta en la década de 1960. Aún así, gracias a los avances tecnológicos, esta teoría ha generado varios tipos adicionales de fractales. El Dr. Edward Lorentz, del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés) es uno de los pioneros en este campo, a pesar de que Jules Henri Pointcaré ya había formulado el "Efecto Mariposa" tan temprano como los 1830's.

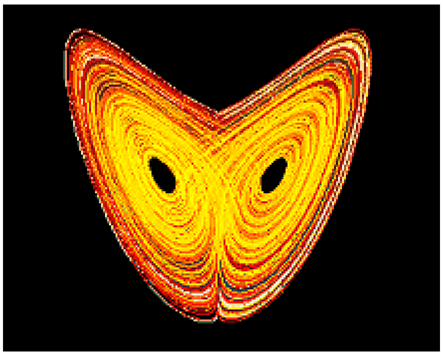

Figura 22: atractor de Lorenz.

Estrictamente hablando, la teoría del caos es el estudio de los sistemas no lineales, para los cuales el índice de cambio no es constante. Se caracterizan por su carácter impredecible. La climatología y el crecimiento poblacional son buenos ejemplos de sistemas no lineales; ambos, también, son fractales.

En sistemas no lineales, cada estado del sistema está determinado por sus estados anteriores (iteración). Un minúsculo cambio en los valores iniciales puede tener dramáticos efectos en el resultado del sistema.

APLICACIONES DE LA TEORÍA FRACTAL

Gracias a los descubrimientos de la teoría del caos y de la geometría fractal, los científicos han podido comprender cómo sistemas que anteriormente se creían totalmente caóticos, ahora exhiben patrones predecibles. Una de las contribuciones más significativas de la geometría fractal ha sido su capacidad para modelar fenómenos naturales tales como las plantas, las nubes, las formaciones geológicas y los fenómenos atmosféricos. Esta teoría también ha contribuido a otros campos tan diversos como la lingüística, la psicología, las técnicas de compresión de imágenes digitales, la superconductividad y otras aplicaciones electrónicas.

Si desea conocer más sobre alguno de los tópicos anteriormente discutidos, le sugerimos que vaya a la sección de Enlaces para obtener algunas referencias.

ANEXO: Addendum

La siguiente reseña sobre tipos de geometría está basada en el libro de Jan Gullberg, **Mathematics from the Birth of Numbers.** New York, WW Norton & Company, 1997.

Geometrías euclidianas

- **geometría euclidiana:** también conocida como geometría clásica o elemental. Principalmente comprende puntos, líneas, círculos, polígonos, poliedros y secciones cónicas. Se basa en las definiciones y axiomas descritos por Euclides (c.330 - c.275 a.C.) en su tratado *Elementos*, un compendio de todo el conocimiento sobre geometría de su tiempo. La *geometría sólida* comprende, principalmente, esferas, cilindros y conos, y fue desarrollada por Arquímedes (287 - 221 a.C.) varios años más tarde. *Las secciones cónicas* fueron el tema de los estudios de Apolonio para la misma época (c.260 - después de 200 a.C.).

- **Trigonometría:** la geometría de los triángulos. Hiparco de Nicea (? - después de 127 a.C.) ha sido acreditado con la invención de esta rama de la geometría, como método para resolver distancias astronímicas. Puede dividirse en *trigonometría plana*, para triángulos en un plano, y *trigonometría esférica*, para triángulos en la superficie una esfera.

- **Geometría de proyección:** interesada en las propiedades de figuras planas que no cambian cuando un conjunto específico de puntos se proyecta sobre un plano. Comenzó a usarse en los siglos XV y XVI como aplicación a la arquitectura por el maestro italiano Leone Alberti (1404 - 1472) y el matemático francés Girard Desargues (1591 - 1661), aunque a veces es asociada (junto con la *geometría descriptiva*) con Tolomeo de Alejandría (c. d.C. 100 - c.170).

- **Geometría analítica:** Inventada por René Descartes (1596 - 1650), trabaja problemas geométricos a base de un sistema de coordenadas y su transformación a problemas algebraicos. Se subdivide en *geometría analítica plana*, para ecuaciones con dos variables, y *geometría analítica sólida*, para ecuaciones con tres variables.

- **Geometría diferencial:** tuvo su origen cuando matemáticos del siglo XVIII, siguiendo los descubrimientos de Descartes, añadieron cálculo diferencial e integral a curvas, superficies y otras entidades geométricas.

- **Análisis vectorial (de vectores):** estudia las cantidades que poseen magnitud y dirección. Conocida desde los tiempos de Aristóteles, y más aún por Simon Stevin en los 1580s, la teoría moderna data de principios del siglos XIX.

Geometrías no euclidianas

En el siglo XIX, matemáticos comenzaron a desarrollar otros tipos de geometría para los cuales, al menos, uno de los axiomas de Euclides no se sostiene. Esto dio origen al florecimiento de las geometrías no-euclideanas.

- **Geometría hiperbólica:** acreditada independientemente a Nicolai Lobachevski (1792 - 1856) y János Bólyai (1802 - 1860). Rechaza el postulado del paralelo de la geometría euclideana, y establece que "Por un punto dado fuera de una línea recta dada pasa más de una línea que no interseca la línea dada."

- **Geometría elíptica:** también rechaza el postulado del paralelo, y establece que "no hay líneas paralelas, y si se extienden suficientemente lejos, dos líneas rectas cualesquiera en un plano se encontrarán." Su invención ha sido acreditada a Bernhard Riemann (1820 - 1866).

- **Topología:** También procedente del siglo XIX, comenzó con el astrónomo belga Augustus Möbius (1790 - 1868) y otros matemáticos, entre los que luego se encontraron David Hilbert (1862 - 1943), Oswald Veblen (1880 - 1966) y Henry Whitehead (1904 - 1960). Se ocupa de las propiedades que no se alteran por deformaciones continuas tales como flexión, "estiramiento" y "torcimiento".

- **Geometría fractal:** una adición reciente al campo de la geometría, estudia las formas y figuras que poseen recursividad y dimensión fraccionaria. La voz cantante de la geometría fractal es el Dr. Benoît Mandelbrot.